

На примере простейшей модели «хищник-жертва» показано, что пространством, ориентированным во времени, для данной системы является бифуркационная кривая (см рис.6).

В этом пространстве эволюция системы схематически представлена на рис.2.

Пространственно-временная структура решений уравнения (4) появляется в результате коллективной информации о всех видах возможных решений. Масштабами собственного времени и собственного пространства в рассматриваемой системе являются постоянные $(\delta_1, \alpha_1); (\delta_2, \alpha_2); \dots$. Известно, что все физические постоянные являются иррациональными числами. По этой причине можно предположить, что величины $(\delta_1, \alpha_1); (\delta_2, \alpha_2); \dots$ являются физическими постоянными в пространственно-временной эволюции биологических популяций, которую получаем с использованием дискретного аналога логистического уравнения, предложенного Мэйем.

Заключение

Пространство, ориентированное во времени, можно построить для дискретных уравнений любого порядка с произвольным числом параметров управления. Назовём это пространство собственным пространством системы.

1. Для уравнения $x_{n+1} = \varphi(x_n, a_1, \dots, a_s)$ собственное пространство находим в результате многократной итерационной процедуры $x_{n+k} = \varphi^{(k)}(x_n, a_1, \dots, a_s)$, где $k = N, N + 1, \dots$. В данном случае собственными временами являются параметры a_1, \dots, a_s ; собственным пространством является x_n ($n =$

2. Для системы уравнений $x^{(m)}_{n+1} = \varphi(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)}, a_1, \dots, a_s)$ собственное пространство находим в результате многократной итерационной процедуры $x^{(m)}_{n+k} = \varphi^{(m)}(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)}, a_1, \dots, a_s)$. В данном случае собственными временами являются параметры a_1, \dots, a_s ; собственным пространством являются $x^{(r)}_n = (r = 1, \dots, m; n = 1, 2, \dots)$.

3. Существенная математическая сложность возникает при построении собственного пространства для уравнений с памятью: $x_{n+k} = \varphi(x_n, \dots, x_{n+k-1}; a_1, \dots, a_s)$.

В собственных пространствах эволюционирующих систем полностью просматриваются все внутренние закономерности, связанные с процессом эволюции.

Литература

1. Пригожий И., Стенгерс И.: *Время, хаос, квант.* – М.: Прогресс, 1944. – 266 с.
2. Гулд Х., Тобочник Я.: *Компьютерное моделирование в физике.* Т. 1. – М.: Изд. МИР, 1990. – 349 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАСС ПИОНА И МЮОНА

А.П. САВРУХИН, *доцент кафедры физики МГУЛа, к. т. н.*

Обозначения:

α – постоянная тонкой структуры;
 c – электродинамическая постоянная;
 m_e, m_μ, m_π – массы электрона, мюона, пиона;
 $\beta = (1 - v^2/c^2)^{0.5}$;
 v – поступательная скорость;
 u – орбитальная скорость;
 I – импульсная энергия;
 T – релятивистская кинетическая энергия;
 K – кинетическая энергия.

Пион и электрон

На рис. 1 изображены различные пути преобразования электрона в пион. Радиусы окружностей равны массам частиц: $0a_1 = m_e$; $0c_1 = 0g = m_\pi$. Ранее [1] было найдено следующее значение аргумента φ_{e0} невозбужденного электрона $\angle d0b_1 = \varphi_{e0} \approx \arctg 1/\alpha$. Когда электрон ускоряется, его фаза увеличивается до значения $\angle a_1 0g = \varphi_e$.

Магнитная энергия $E_B = m_e \alpha / 2$ меняется мало, так как полная скорость всегда равна c , электрическая энергия будет равна $E_E = m_e \alpha / 2 \beta$, и полная электромагнитная энергия будет равна $E_{EB} = E_E + E_B = 0,5 m_e \alpha (1 + 1/\beta)$. Поскольку $\Delta O c_1 c = \Delta O a_1 g$, а $\Delta O a_1 a \sim \Delta O c_1 c$, найденное значение E_{EB} равно электромагнитной энергии пиона, проекции $O c_1$ на ось $O X$, то есть $O c = m_e$: $E_{EB} = m_e$, $\beta = (2/\alpha - 1)^{-1} = m_e / m_p$.

Отсюда находим массу пиона

$$m_p = m_e (2/\alpha - 1) = 139,54 \text{ МэВ.} \quad (1)$$

Когда пион π распадается по схеме $g-d-b_1 \pi \rightarrow e \nu_e$ на электрон и нейтрино, то импульсы $p = g d = d b_1$ частиц будут равны [2]:

$$p = \frac{m_p^2 - m_e^2}{2m_p}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } 0d &= (m_e^2 + p^2)^{0,5}; \quad 0g = \\ &= m_p = 0d + p; \quad p = m_e / \alpha; \end{aligned}$$

$$m_p = \frac{2m_e}{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \right) = 140,05 \text{ МэВ.} \quad (3)$$

Величина (1) отличается от экспериментальной на 0,03 МэВ, а величина (3) на 0,48 МэВ $\approx m_e$, причем это означает, что аргумент электрона будет увеличен или пион должен обладать нулевым импульсом.

Пион и мюон

На рис. 2 дано следующее построение. Дуга $c_2 b c_1$ имеет радиус $O b = m_p$. Прямая $O c_3$ проведена под произвольным углом φ . Через точку b пересечения прямой $O c_3$ с дугой $c_2 b c_1$ проведена касательная $b d$ и опущен перпендикуляр $b b_1$ на ось $O X$. Дуга $a b_1$ имеет радиус $O b_1$. Полуокружность $O a c_1$ имеет радиус $m_p / 2$, точку a пересечения с прямой $O c_3$, касательную $a c_1$ и вертикаль $a a_1$. Вертикаль $c_1 c_3$ есть касательная к дуге $c_2 b c_1$.

Имеем согласно вышеизложенному для пиона: $\varepsilon_0 = m_p$, $b d = I_1 = m_p \operatorname{tg} \varphi$ – приобретенная импульсная энергия пиона; $0d = \varepsilon = m_p / \cos \varphi$ – полная энергия пиона, $b c_3 = c_1 d = \varepsilon - \varepsilon_0 = T_1$, $\varepsilon = \varepsilon_0 \beta$, $\beta = (1 - v^2)^{0,5} = \cos \varphi$, $v = (1 - \beta^2)^{0,5} = \sin \varphi$, $u = \beta = \cos \varphi$, $b b_1 = \varepsilon_0 \sin \varphi$ – сильная компонента собственной энергии пиона; $O b_1 = \varepsilon_0 \cos \varphi$ – его электромагнитная компонента.

Поскольку $\Delta O a a_1 \sim \Delta O b b_1$, пион может быть построен из частицы с собственной энергией $m_m = O a = O b_1 = \varepsilon_0 \cos \varphi$ и импульсной энергией $I = a c_1 = O a \operatorname{tg} \varphi = \varepsilon_0 \sin \varphi = b b_1$.

Уравнение полуокружности $O a c_1$ имеет вид

$$y_1 = (m_p x - x^2)^{0,5}, \quad (4)$$

и оно определяет положение вершин прямоугольных треугольников $O a c_1$ с катетами m_m и I , и гипотенузой m_p . Имеем: $m_m = m_p \cos \varphi$; $I = m_p \sin \varphi$; $a_1 c_1 = I \sin \varphi = m_p \sin^2 \varphi$. Заменяя в (2) m_e на m_m , получим:

$$p = \frac{m_p^2 - m_m^2}{2m_p} = 0,5 m_p \sin^2 \varphi, \quad (5)$$

то есть импульс мюона и нейтрино равен кинетической энергии мюона $K = m_m v^2 / 2$ или проекция I на ось $O X$ равна удвоенной кинетической энергии.

Продолжив построение, получим ряд частиц с массами $O c_1 - O b_1 - O a_1$: $m = m_p \cos^n \varphi$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Сравнивая этот ряд с экспериментальными данными, можно сделать заключение, что мюон является наиболее тяжелой частицей из распада пиона, то есть $n = 1$, поэтому необходимо определить лишь величину параметра φ .

Отложим отрезок $c_1 b_3 = p = 0,5 a_1 c_1$, тогда отрезок $O b_3 = m_p - p = \varepsilon_m$, где $\varepsilon_m = (m_m^2 + p^2)^{0,5} = \frac{m_p^2 + m_m^2}{2m_p}$, проведем вертикаль

$b_3 b_2$ и радиус $O a_2 b_2$, так что радиус $O a_2 = O b_3 = u$, а длина касательной $b_3 a_3$ также равна p . Подробнее построение дано на рис.3. Дуга $c_2 c_1$ имеет радиус m_p , полуокружность $a_5 a_3 c_1$ имеет радиус $b_3 a_3 = p$, $O a_3$ – отрезок касательной, $a_3 a_4$ – высота $\Delta a_5 a_3 b_3$, $O b_3 = \varepsilon_m$.

Поскольку $\Delta O a_3 b_3 \sim \Delta a_3 a_4 b_3$, имеем $O b_3 / a_3 b_3 = a_3 b_3 / a_4 b_3$, $\varepsilon_m / p = p / (m_p - p - x)$, где $x = O a_4$ – текущая координата.

Отсюда находим импульс мюона:

$$p = \frac{m_p (m_p - x)}{2m_p - x} \quad (6)$$

и ординату y_2 точки a_3 : $y_2 = x \operatorname{tg} \varphi$; $\sin \varphi = p / (m_p - p)$,

$$y_2 = (m_p - x) \cdot \left(2 \frac{m_p}{x} - 1 \right)^{-0,5} \quad (7)$$

и, заменив x на $m_p - x$, получим:

$$y_{2a} = x \left(\frac{m_p - x}{m_p + x} \right)^{0,5} \quad (8)$$

Кривые y_2 и y_3 даны на рис. 4.

Функция y_{2a} имеет максимум при $x_{2m} =$

$$0,5m_p(3 - \sqrt{5}), y_{2m} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^{0,5} m_p.$$

Уравнение прямой y_3 , проходящей через начало координат и точку (x_{2m}, y_{2m}) , имеет вид

$$y_3 = x \operatorname{tg} \tau, \quad (9)$$

где $\operatorname{tg} \tau = y_{2m} / x_{2m} = (0,5(\sqrt{5} - 1))^{0,5} = \cos \tau$, так что фаза $\tau = 0,666239433$, найденная из условия $\operatorname{tg}^2 \tau = \cos^2 \tau = \sin^2 \tau$ определена точно: $x_{2m} = m_p \cos^4 \tau$; $y_{2m} = m_p \cos^5 \tau$. Эта частица имеет энергию $m_p \cos^3 \tau$ и отличается тем, что имеет максимальную компоненту сильного

поля из всех частиц, когда распад пиона осуществляется с нулевой его фазы.

Решая совместно уравнения (8) и (9), найдем координаты точки пересечения кривых: $x_{3a} = m_p \cos^6 \tau$; $y_{3a} = m_p \cos^7 \tau$. Ей симметрична точка на кривой (7), а длина линии, соединяющей её с началом координат равна $m_p \cos \tau$, то есть длине хорды $0a_2$. Она также находится на пересечении кривых y_2 и y_4 , где

$$y_4 = (x - m_p) \operatorname{tg}(-\tau), \quad (10)$$

$y_{4a} = m_p \cos^7 \tau$, $x_{4a} = (1 - \cos^6 \tau) = 2m_p \cos^4 \tau$. Тогда также получим энергию частицы $\epsilon_m = [(y_{4a})^2 + (x_{4a})^2]^{0,5} = m_p \cos \tau$, которая затем тормозится до энергии m_m (хорда $0a$ на рис. 2). Её импульс $p = m_p(1 - \cos \tau)$, и тогда искомая масса равна $m_m = m_p(2 \cos \tau - 1)^{0,5} = 105,58568$ МэВ с относительным отклонением от экспериментальной величины $< 7 \cdot 10^{-4}$.

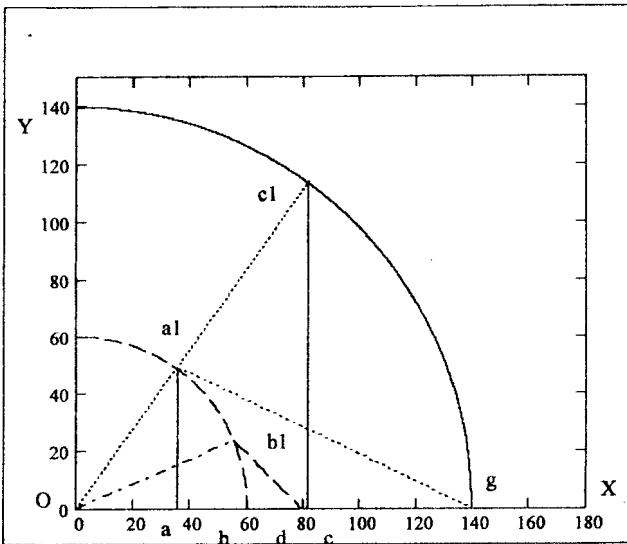


Рис. 1. Схема преобразования электрона в пион

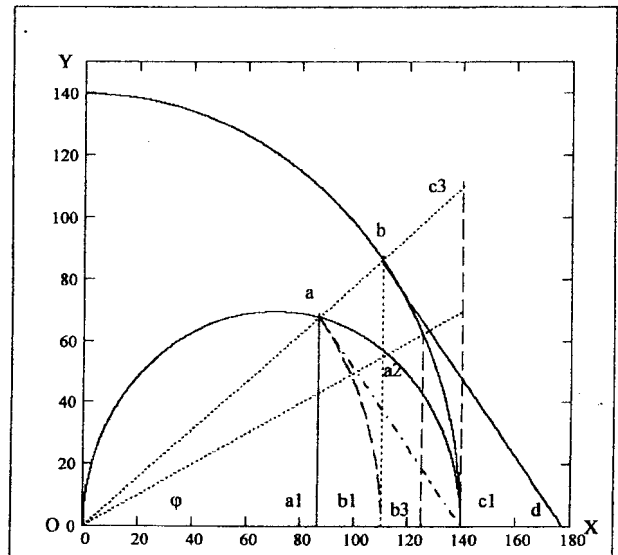


Рис. 2. Компоненты энергии пиона и мюона

Обсуждение результатов

1. Особенности хорды $0a_2$ в том, что её длина $m_p \cos \theta$, а импульсная энергия $m_p \cos^2 \tau$ имеет проекцией на ось OX $m_p \cos^4 \tau$. Упомянутая выше частица с максимумом сильного поля имеет энергию $m_p \cos^3 \tau$, импульс $m_p \cos^4 \tau$ и равную ему проекцию на ось OX , то есть электромагнитную компоненту. Энергия возбужденного состояния её равна $m_p \cos^2 \tau$, что равно длине $b_2 b_3$ (сильная компонента пиона с фазой τ) и импульсной энергии $a_2 c_1$.

2. Координаты общей точки дуги ab_1 радиусом m_p и кривой 7: $x=2m_p(1-1/2\cos\theta)$ = 101,604 МэВ, $y = 28,722$ МэВ. Длина хорды кривой y_1 , проходящей через эту точку, равна 134,3 МэВ, что близко к массе пи-ноль мезона. С другой стороны, масса следующей по рангу частицы равна $m_p/\cos\theta$, импульс ее перехода (распада) в пион равен $m_p(1/\cos\theta - 1)$, касательная к окружности этого радиуса

имеет длину $m_p \cos \theta = 134,676$, где $\theta = \arctg(1/\cos\theta - 1)$. Относительное отклонение от экспериментальной величины массы пи-ноль мезона составляет $2 \cdot 10^{-3}$.

3. Чтобы найти искомую фазу τ , можно поступить следующим образом. Первая проекция $0b_3$ пиона $0b_2$ равна энергии ϵ_m , вторая – её импульсная энергия $I = b_2 b_3$, она же есть электромагнитная компонента ϵ_m , третья равна длине вертикали через точку a и составляет сильную компоненту ϵ_m , четвертая – удвоенная кинетическая энергия. Достаточно потребовать, чтобы она равнялась электромагнитной компоненте импульсной энергии I . Тогда из условия $\sin^2 \tau = \cos^4 \tau$, найдем $\tau = 0,666239$.

4. Данная методика применима для уточнения соотношения масс частиц каонового триплета.

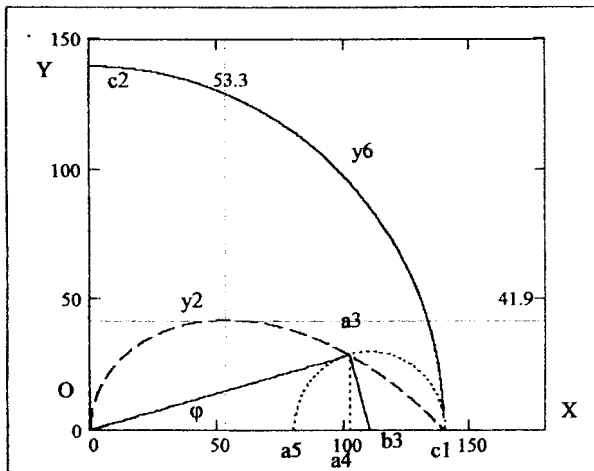


Рис. 3. Координаты энергии мюона сразу после распада пиона

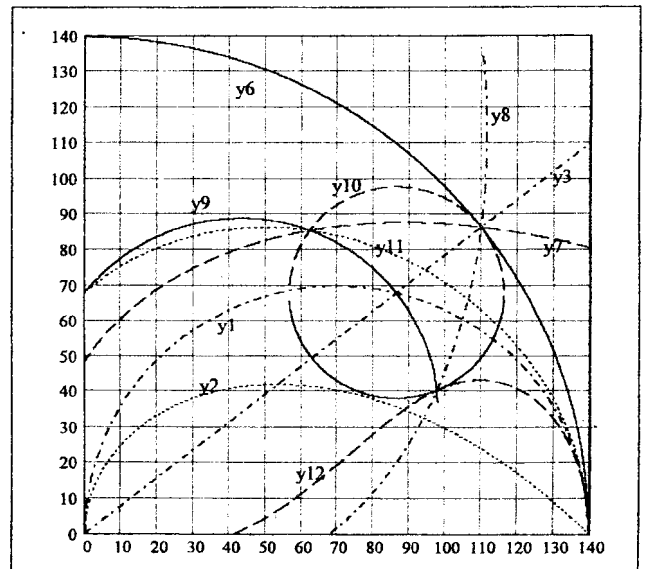


Рис. 4. Геометрические места точек распада пиона

5. Мюону не обязательно тормозиться за счет столкновения. Пион в покое может одномоментно распасться на нейтрино, гамма-квант, имеющие только сильную компоненту, уносящие энергию $2p$ и нулевой импульс, и мюон. Тогда окружности радиусов m_p и m_m будут иметь дистанцию $2p$ (5) по вертикали. Тогда

$$y_5 = (m_m^2 - x^2)^{0,5}; \quad y_6 = (m_p^2 - x^2)^{0,5}; \quad x = m_m(1 - m_m/2m_p)^{0,5}; \quad 2p = m_p[2(1 - (x/m_p)^2)^{0,5} - 1]; \quad m_m^2 = 2m_p^2[1 - (1 - x^2/m_p^2)^{0,5}].$$

Например, при $m_m = 105,658$ МэВ; $2p = 59,583$ МэВ; $x = 97,797$ МэВ. При $x = p \cos \tau$ вертикаль $b_2 b_3 = p \cos^2 \tau$ делится на участки $p \cos^6 \tau$ и $p \cos^4 \tau$.

6. Как следует из п.2, проекция релятивистской кинетической энергии $T_1 = m_p(1/\cos \tau - 1)$ на ось OX $T_1 \cos \tau$ равна импульсу $b_3 c_1 = m_p(1 - \cos \tau)$ и энергии $T = a_2 b_2$. В частности, из этого следует равенство $1 - \cos \gamma = 0,5 \cos^3 \tau$, где $\gamma = \angle \Delta a_0 a_1$. Тогда $m_m = m_p \cos \gamma = 105,6636$ МэВ.

9. Исследованы следующие функции:

$$y_7(\varphi) = m_p [2 \sin \varphi + (2 \cos \varphi - 1)^{0,5} \cdot (1 - \cos \varphi) - \operatorname{tg} \varphi]; \quad (11)$$

$$x_7(\varphi) = m_p [2 \cos \varphi - (2 \cos \varphi - 1)^{0,5} \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \sin \varphi) - 1],$$

определяющие положение точки с массой m_m при произвольном φ совместно с функциями

$$y_8(x, \varphi) = -x \sin \varphi + y_2 \cdot \cos \varphi; \quad (12)$$

$$x_8(x, \varphi) = x \cos \varphi + y_2 \cdot \sin \varphi,$$

полученными путем поворота y_2 на угол φ , а также с функциями

$$y_9(x, \varphi) = \left[0,5 \cdot \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{2} + \left[(0,5 \cos \varphi)^2 - (x/m_p - 0,5 \cos^2 \varphi)^2 \right]^{0,5} \right] \cdot m_p; \quad (13)$$

$$y_{10}(x, \varphi) = \left[\sin \varphi \cdot \cos \varphi - \left[(1 - \cos \varphi)^2 - (x/m_p - \cos^2 \varphi)^2 \right]^{0,5} \right] \cdot m_p.$$

Аналогична и другая группа функций, полученная из условия, что распад может быть в обе стороны и при любом φ (см. рис. 4). Особенности обнаружено не было.

Заключение

Пион распадается из состояния с фазой, при которой его электромагнитная компонента равна массе мюона после отделения нейтрино, а его сильная компо-

7. Нормаль к линии y_3 через точку $x_2 m$, $y_2 m$ отсекает на осях OY и OX отрезки $m_p \cos \tau$ и $m_p \cos^2 \tau$, и её длина равна m_p . Этот треугольник равен $\Delta O a_2 c_1$ и также треугольнику, образованному вертикалью через точку a_2 до кривой y_6 и радиусом m_p .

Пусть искомая масса равна $m(O a_2)$. Её проекция на ось OX равна $m \cos \varphi$, где $\cos \varphi = m/m_p$. Длина вертикали равна $h = \sqrt{m_p^2 - x^2}$. Потребуем, чтобы h была равна m . Отсюда получим равенство $\cos^2 \varphi = 1 - \cos^4 \varphi$, то есть $\varphi = \tau$. Это означает, что масса $m = m_p \cos \tau = 109,7$ МэВ есть продукт распада пиона с фазой $(0,5\pi - \tau)$, имеющего сильную компоненту, равную m .

8. Любая прямая y_4 при произвольном угле τ в точке пересечения с кривой y_2 определяет искомую массу m_m как длину линии, соединяющей эту точку с началом координат. Она также отсекает отрезок m_m на оси OY .

нента равна импульсной энергии мюона, составляющей золотое сечение массы пиона.

Литература

1. Саврухин А.П. Исследование свойств естественного заряда: Монография. – М.: МГУЛ, 1998. – 51 с.
2. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. Т. 2. Физика элементарных частиц. – М.: Атомиздат, 1974. – 336 с.